16-11-20

- **Χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς γ.δ.ε.:**

- Η γενική περίπτωση της ομογενούς Ε με σταθερούς συντελεστές: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ σταθερές.

$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,\ a_n \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = e^{\lambda t} \to a_n \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 e^{\lambda t}\cdot\lambda + a_0 e^{\lambda t} = 0,\ t \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Το πολυώνυμο $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,\ t \in \mathbb{R}$ καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n)

$\boxed{\text{Θεώρημα (19)}}$: Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου p της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n) με πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_s$ αντίστοιχα, τότε οι συναρτήσεις:

$y_{ij} = t^j e^{\lambda_i t},\ t \in \mathbb{R}\ (j = 0, 1, \dots, m_i - 1,\ i = 1, \dots, s)$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n)

Απόδειξη: Άσκηση

Πχ

Άσκηση 1iii, σελ. 113: Να επιλυθεί η εξίσωση $y''' - 7y'' + 5y' + y = 0$

Λύση: Είναι $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 5\lambda + 1 = \lambda^2(\lambda-1) - 5\lambda(\lambda-1) - (\lambda-1)(\lambda+1) =$
$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda - 1)$, απ' όπου έχουμε:

$\lambda_1 = 1,\ m_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{10},\ m_2 = 1,\ \lambda_3 = 3 + \sqrt{10},\ m_3 = 1.$

και συνεπώς, ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το:

$S = \{e^t, e^{(3-\sqrt{10})t}, e^{(3+\sqrt{10})t}, t \in \mathbb{R}\}.$

Άσκηση 2i, σελ. 113: Να επιλυθεί το π.α.τ.: $y''' - y'' = 0$ με $y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 2.$

Λύση: Είναι $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) \longrightarrow$

$\lambda_1 = 0,\ m_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ m_2 = 1$

και συνεπώς, ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το:

$S=\{e^0, te^0, e^t / t\in\mathbb{R}\}=\{1, t, e^t\}$.

Για $y(t)=c_1+c_2t+c_3e^t$, έχουμε:

$y(0)=1 \Rightarrow c_1+c_2=1$.

$y'(0)=3 \Rightarrow c_2+c_3=3$.

$y''(0)=2 \Rightarrow c_3=2$.

- **Ομογενείς γ.δ.ε. με πραγματικούς συντελεστές: Βασικά σύνολα πραγματικών λύσεων.**

$\boxed{\text{Θεώρημα (20)}}$: Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές $a_n, a_{n-1}, .., a_1, a_0$ της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n) είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε:

(i) Αν y είναι μία λύση της (E_0^n) τότε και οι πραγματικές συναρτήσεις $Re\,y, Im\,y$ είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης.

(ii) Κάθε λύση της εξίσωσης με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική.

(iii) Αν $\{y_1, ..., y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων, τότε y είναι μία πραγματική λύση αν-ν υπάρχουν πραγματικές σταθερές $\{c_1, .., c_n\}$ τ.ω. $y=c_1y_1+...+c_ny_n$.

(iv) Αν $\lambda_k=\sigma_k+i\tau_k$ $(k=1, .., r)$ με $\sigma_k, \tau_k \in\mathbb{R}\neq 0$ είναι διακεκριμένες ~~λύσεις~~ ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$ της (E_0^n) με πολλαπλότητες, αντίστοιχα $m_1, .., m_r$ και $\lambda_{2r+1}, .., \lambda_s$ είναι διακεκριμένες πραγματικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$ της (E_0^n) με πολλαπλότητες, αντίστοιχα $m_{2r+1}, .., m_s$, τότε οι συναρτήσεις:

$t^j e^{\sigma t}\cos(\tau_k t)$, $t\in\mathbb{R}$ $(j=0,1,..,m_k-1$, $k=1,..,r)$

$t^j e^{\sigma t}\sin(\tau_k t)$, $t\in\mathbb{R}$ $(j=0,1,..,m_k-1$, $k=1,..,r)$

$t^j e^{\lambda_k t}$, $t\in\mathbb{R}$ $(j=0,1,..,m_k-1$, $k=2r+1,..,s)$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης.

Απόδειξη: (i) Αν $y(t)=Rey(t)+i\,Imy(t)$ είναι μία λύση της (E_0^n) τότε είναι: $0=L[y(t)]=L[Rey(t)+i\,Imy(t)]=L[Rey(t)]+iL[Imy(t)]$
$\Longrightarrow L[Rey(t)]=L[Imy(t)]=0$.

(ii) Αν $y(t)=Rey(t)+i\,Imy(t)$ είναι μία λύση της (E_0^n) με $y(t_0)=c_0,\dots,y^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1}$ $c_0,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{R}$, τότε η πραγματική συνάρτηση $Imy(t)$ είναι μία λύση της εξίσωσης για την οποία έχουμε:
$Imy(t_0)=0,\dots,Imy^{(n-1)}(t_0)=0 \Longrightarrow Imy=0$

(iii) Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (E_0^n)
$(\Longleftarrow)$ Αν $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ τότε προφανώς η συνάρτηση $y=c_1y_1+\dots+c_ny_n$ είναι πραγματική λύση της εξίσωσης.
$(\Longrightarrow)$ Αν y είναι μία πραγματική λύσης της εξίσωσης (E_0^n) με $y=c_1y_1+\dots+c_ny_n$, τότε:
$0=Imy=Im(c_1y_1+\dots+c_ny_n)=y_1Im(c_1)+\dots+y_nIm(c_n)$
$\Longrightarrow Imc_1=\dots=Imc_n=0$
απ' όπου έχουμε ότι οι σταθερές $c_1,\dots,c_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί

(iv) Άσκηση.

1x) Παράδειγμα: Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μίας ομογενούς γ.δ.ε. $13^{ης}$ τάξης είναι το: $p(\lambda)=(\lambda^2+4)^3(\lambda+4)^2(\lambda^2-9)\lambda^3$.
Τότε, ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της εξίσωσης απαρτίζεται από τις συναρτήσεις:

$t^j\cos 2t$ $(j=0,1,2)$	, $\cos 2t$	, $t\cos 2t$	, $t^2\cos 2t$
$t^j\sin 2t$ $(j=0,1,2)$	, $\sin 2t$	, $t\sin 2t$	, $t^2\sin 2t$
e^{-4t}	, te^{-4t}	, e^{-4t}	, te^{-4t}
e^{-3t}	, e^{3t}	, e^{-3t}	, e^{3t}
$1,t,t^2$ $(t\in\mathbb{R})$	, 1	, t	, t^2.

Ομογενείς Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές: (Γραφίδα):

Πχ $y''' + y'' + y' + y = 0 \Rightarrow$
$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = p(\lambda)$
$\Rightarrow \dfrac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = p(\lambda),\ \lambda \neq 1.$
$\to (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)$ | e^t, cos t, sin t.
$\pm 1 \qquad \pm 1$

Πχ $y^{(5)} + y^{(4)} + \ldots + y' + y = 0$
$\lambda^5 + \lambda^4 + \ldots + \lambda + 1 = p(\lambda)$

Πχ $y^{(2n+1)} + y^{(2n)} + \ldots + y' + y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^{2n+1} + \lambda^{2n} + \ldots + \lambda + 1$

Υποδείξεις για: B.29, B.36, B.23 (άλυτες από φυλλάδιο)
Επίσης, βιβλίο σελ. 83 → ασκήσεις 7, 8 (να τις δω).